

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τετάρτη 14 Σεπτεμβρίου 2016

- (1 μονάδα) Έστω K σώμα. Στον K -διανυσματικό χώρο V δίνονται ο υποχώρος του W και δύο διανύσματα u, v . Αν το u δεν ανήκει στον υποχώρο W και το u ανήκει στον υποχώρο $W + \langle v \rangle$, δείξτε ότι το v ανήκει στον υποχώρο $W + \langle u \rangle$.
- (2 μονάδες) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ που ορίζεται ως εξής

$$T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - 4y + 3z, -x + 2y + 2z, z).$$

Να υπολογιστούν:

- α) μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}T$ και μια βάση της εικόνας $\text{Im}T$ της T ,
 - β) ο πίνακας A της T από την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 στην διατεταγμένη βάση $a = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$ του \mathbb{R}^4 .
 - γ) ο πίνακας B της T από την διατεταγμένη βάση $b = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ του \mathbb{R}^3 στην κανονική βάση του \mathbb{R}^4 .
- (2 μονάδες) Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ δίνονται οι υποχώροι του $V = \langle x + 3, -x^2 + x + 2, x^2 + 1 \rangle$ και $W = \langle x^2 + x, x + 1 \rangle$. Να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V + W, V \cap W$ και υποχώροι V', W' τέτοιοι ώστε $\mathbb{R}_2[x] = V \oplus V'$ και $\mathbb{R}_2[x] = W \oplus W'$.
 - (1 μονάδα) Για ποιές τιμές του a τα διανύσματα $(2a, 1, 1), (1, 2a, 1)$ και $(1, 1, 2a)$ είναι βάση του \mathbb{R}^3 ;
 - (2 μονάδες) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$x + y - z = 1$$

$$bx + 2y + 8z = a$$

$$2x + y + bz = 3 + b$$

για τις διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$.

- (2 μονάδες) Βρείτε την ορίζουσα του $n \times n$ -πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & b & \dots & b \\ b & a+b & b & \dots & b \\ b & b & a+b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a+b \end{pmatrix}$$

που τα στοιχεία του στην διαγώνιο είναι ίσα με $a + b$ και τα υπόλοιπα με b , όπου $n \geq 43$.

Καλή επιτυχία.